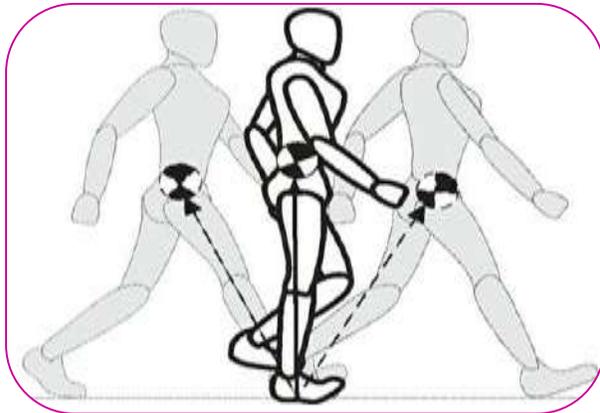




## PROJETO DE UMA ESTRATÉGIA DE CONTROLE PARA O PÊNDULO INVERTIDO SIMPLES SOBRE CARRINHO



### RESUMO

Sistema de controle automático é uma área do conhecimento que está sendo cada vez mais utilizada no dia-a-dia da humanidade. A necessidade de se automatizar processos industriais, retirando boa parte da intervenção humana, é uma das grandes vantagens da utilização deste tipo de controle.

Neste cenário, um exemplo muito difundido no ambiente acadêmico é o pêndulo invertido, pois sua modelagem e controle assemelham-se ao de braços robóticos utilizados em processos industriais, há semelhança ao momento inicial do lançamento de um míssil ou ao próprio equilíbrio do corpo de um animal, seja qual for a quantidade de membros que este possui.

Este trabalho vislumbra a utilização de uma estratégia de controle, que se chama controle chaveado, em que dois controladores são projetados para o mesmo sistema, mas ambos têm faixas de operação distintas. Como plataforma de desenvolvimento, foi utilizado o kit IP02 da Quanser, juntamente com software MatLab/Simulink.

**PALAVRAS-CHAVE:** Pêndulo invertido; Modelagem; Controle chaveado.

Thales Ruano Barros de Souza<sup>1</sup>;  
Aline dos Santos Pedraça<sup>2</sup>;  
Luan da Silva Serrão<sup>3</sup>;  
Luiz Felipe de Oliveira Araújo<sup>4</sup> and  
Paulo de Sousa Silva<sup>5</sup>;

<sup>1</sup>Mestre em Engenharia Elétrica, pela UFAM.

<sup>2</sup>Discente do Curso de Engenharia Elétrica, pelo UNINORTE.

<sup>3</sup>Discente do Curso de Engenharia Elétrica, pelo UNINORTE.

<sup>4</sup>Discente do Curso de Engenharia Elétrica, pelo UNINORTE.

<sup>5</sup>Mestrando em Engenharia Elétrica, pela UFAM.

### 1. INTRODUÇÃO

A Engenharia de Controle e Automação é um campo excitante no qual se podem aplicar diversos conhecimentos de engenharia, pois ela permeia várias áreas do saber humano. Foi fácil perceber durante este trabalho como as disciplinas do curso de engenharia se ajustam dentro desse grande cenário que é a natureza. O engenheiro dessa especialidade trabalha com sensores, motores, bem como circuitos eletrônicos, pneumáticos, hidráulicos, etc. É uma grande oportunidade para expandir os horizontes além do círculo universitário.

A maneira que atualmente os cursos de Controle e Automação são ministrados ainda baseia-se primordialmente na resolução de problemas clássicos nas salas de aulas. Ou seja, apenas são resolvidos problemas já propostos com metodologias específicas para que o conhecimento sobre tais técnicas seja aplicado e assim mais facilmente fixado pelos alunos.

Contudo, ao serem utilizados modelos já prontos para aplicar técnicas de controle, as importantes etapas de modelamento e identificação do sistema a ser controlado são ignoradas. Para

contemplar este aspecto, estão sendo utilizados cada vez mais experimentos em laboratório para que sejam estudados todos os aspectos de um projeto de controle, seja este utilizando técnicas clássicas ou modernas.

Cada vez mais está sendo utilizado o conceito de “laboratórios abertos”, nos quais os alunos podem estudar os processos a serem controlados e buscar soluções próprias para os mesmos. São então analisadas questões como confiabilidade, erros estacionários, entre outros. Dessa forma, em um único espaço físico, é possível utilizar diversos experimentos para diferentes tipos de controle. Dentre estes podemos citar os controles: analógico, digital, não-linear, ótimo, robusto e adaptativo.

A implementação de ferramentas e softwares como MATLAB nos laboratórios é mais barato e mais confiável do que experimentos mecânicos, contudo sistemas físicos possuem imperfeições que não são muitas vezes modeladas e não-linearidades que tornam ainda mais interessante e desafiadora a implementação do controle.

Com essas idéias em vista, estes experimentos podem ser cópias em escala de sistemas reais, como o caso do controle de um aeromodelo de helicóptero, ou podem ser experimentos que a primeira vista não possuem ligação direta com sistemas reais, como os experimentos “Ball&Beam” e o pêndulo invertido.

O pêndulo invertido é um mecanismo com características dinâmicas intrinsecamente instáveis e representa uma plataforma útil para o estudo de muitos outros mecanismos complexos. Uma analogia simples é a brincadeira de equilibrar um lápis ou um cabo de vassoura na ponta dos dedos. Para conseguir uma condição relativamente estável é necessário ficar constantemente movendo a mão de forma a manter o eixo do cabo de vassoura nas proximidades da sua posição vertical.

Originalmente, esse sistema era usado para ilustrar idéias na teoria de controle linear, tal como o controle de sistemas instáveis. Sua inerente não-linearidade ajudou a manter sua usabilidade ao decorrer dos anos e ele é agora usado para ilustrar muitas idéias emergentes no campo do controle moderno não-linear.

Pertence à classe de sistemas subatuados, que são sistemas que têm menos entradas do que graus de liberdade. Isso torna complexa, a tarefa de controlar esse sistema, tornando-o uma referência para o teste de diferentes técnicas de controle.

Este trabalho é o resultado final de uma pesquisa que se iniciou apenas por curiosidade e culminou em um trabalho de conclusão de curso. O processo de pesquisa teve como fonte principal dezenas de artigos disponíveis pela internet. A complementação dos experimentos foi suportada pela literatura clássica utilizada em quase todos os cursos de engenharia.

### 1.1 Objetivo Geral

O objetivo deste trabalho é projetar um controlador para o pêndulo invertido simples sobre carrinho, iniciando na posição de repouso, jogando-o para cima e finalmente equilibrando e mantendo-o nessa posição ao mesmo tempo em que o carrinho é deslocado para uma posição desejada.

### 1.2 Objetivo Específico

A estratégia de controle utilizada neste trabalho é um esquema de modo chaveado, ou seja, há uma alternância entre os controladores Proporcional-Velocidade (PV) que joga o pêndulo para cima movimentando o carrinho e Regulador Linear Quadrático (LQR) que tem como função equilibrar o pêndulo na posição invertida.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Há um número relativamente grande de versões do pêndulo invertido oferecendo uma variedade de controle. Os tipos mais comuns são: uma única haste sobre carrinho, o pêndulo duplo invertido sobre carrinho, o pêndulo rotacional de um só braço, e o pêndulo rotacional de duas ligações.

Este capítulo trata das aplicações existentes, do pêndulo invertido, inclusive aborda um modelo generalizado de pêndulo utilizado na biomecânica. A plataforma do pêndulo invertido sobre carrinho utilizada no projeto é apresentada. Logo depois se aborda as equações de Lagrange e modelo de linearização por aproximação. A seguir apresenta-se a metodologia utilizada para realizar a modelagem em espaços de estados com realimentação e os tipos de plantas existentes, sem realimentação e com realimentação, citando-se suas vantagens e desvantagens. Após isso, são abordados os índices de desempenho utilizados no trabalho, que

serviram para medir a qualidade dos resultados do projeto. Em seguida são apresentados os controladores utilizados no projeto.

## 2.1 Aplicações

Modelos biomecânicos do modo de caminhar dos seres humanos têm aplicações em muitas áreas como esportes, fabricação de calçados, robótica, etc. A posição ereta estável de um ser humano ao caminhar se aproxima muito de um pêndulo invertido pivotado em suas articulações. A modelagem resultante é conhecida como Pêndulo Invertido Humano (HIP – Human Inverted Pendulum). Um modelo simplificado desta descrição é mostrado na figura 1, cujos conceitos definiram um novo segmento no estudo da biomecânica com os modelos conhecidos como SLIP, um anacronismo de Spring Loaded Inverted Pendulum. Na figura 1 pode-se notar que o SLIP consiste em um pêndulo associado a um amortecedor ou mola, ou seja, deve-se considerar mais um amortecimento na sua modelagem.

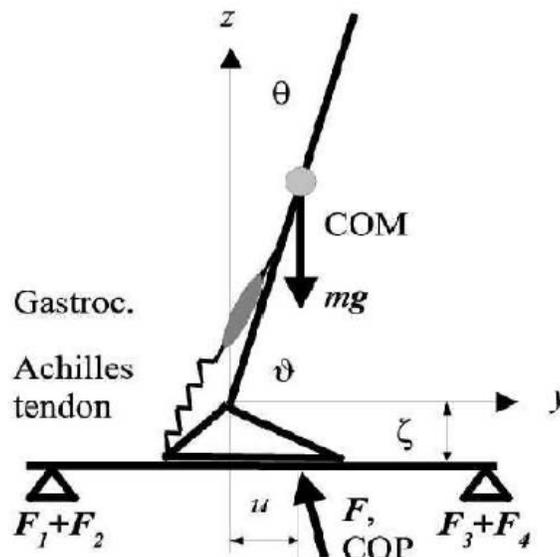


Figura 1 SLIP

[10] identificou que modelos SLIP contêm os conceitos básicos utilizados implicitamente ou explicitamente na maioria dos trabalhos sobre locomoção com pernas (legged locomotion), tanto na área de robótica quanto em biomédica. O modelo SLIP é uma aproximação razoável que descreve o centro de massa do movimento de um animal em caminhada, independente do número de pernas, tamanho ou tipo.

Uma abordagem interessante ao problema do pêndulo invertido feita por [5] no qual o equilíbrio do sistema é iniciado com a haste na sua posição de descanso inferior. O algoritmo de controle utiliza técnicas de linearização por retroação de estados e considerações sobre a energia do sistema para mover a haste até sua posição superior para que posteriormente possa ser equilibrada. Para o controle do equilíbrio da haste é utilizado um controlador projetado através da técnica de espaço de estados. A técnica de controle chaveado é empregada para reduzir a complexidade do sistema permitindo que duas malhas de controle independentes sejam implementadas operando em faixas de passagem distintas.

[3] apresentam uma abordagem distinta para o levantamento do pêndulo (swing-up) e seu equilíbrio. O controle é feito pela informação da energia do pêndulo ao invés dos dados da sua posição e velocidade. O comportamento global da operação de levantamento da haste é completamente caracterizado pela razão entre a máxima aceleração da haste pivotada e a aceleração da gravidade. No trabalho é mostrado, por exemplo, que para se conseguir o levantamento da haste é suficiente que esta relação seja maior que quatro terços. Em adição a estes trabalhos pode-se ainda citar [Nair e Leonard] que realizaram um estudo sobre o pêndulo de

Furuta abordando o aspecto do emprego da análise por energia. Uma das questões tratadas neste estudo foi o efeito dos atritos que podem representar um desvio significativo no modelo por se tratar de não-linearidades que não são levadas em consideração nas modelagens típicas.

## 2.2 Pêndulo Invertido Sobre Carrinho

Um pêndulo invertido típico é um dispositivo físico que consiste de uma barra cilíndrica, usualmente metálica, a qual é livre para movimentar em torno de um ponto fixo. Esse ponto é montado em um carro que por sua vez é livre para mover na direção horizontal. O carro é acionado por um motor que pode exercer uma força variável no deslocamento do mesmo. A haste naturalmente tende a cair, pois sua posição vertical é uma condição de equilíbrio instável.

Neste trabalho será utilizado o kit IP02 da Quanser, que consiste de um pêndulo simples sobre carrinho, como ilustra a figura 2.

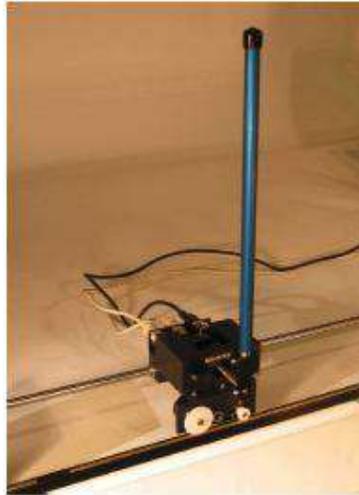


Figura 2 Kit IP02

Este kit utiliza um software (Quarc) e uma plataforma de hardware (Placa terminal e Placa de aquisição de dados) que fazem a interface entre a planta e o software MatLab, ou seja, adquirem-se os dados dos encoders do kit, o MatLab processa os dados e devolve os valores de tensão que devem ser aplicados aos motor DC do kit, para que assim aconteça o controle tanto do deslocamento do carrinho quanto do ângulo da haste do pêndulo.

## 2.3 Equações de Lagrange

Utilizando as equações de Lagrange, as equações de movimento de um sistema podem ser deduzidas. Ao contrário das Leis de Newton, o método de Lagrange não necessita de identificação das forças envolvidas. Dessa forma, as equações de Lagrange são utilizadas para simplificar a modelagem de sistemas complexos, principalmente quando não é necessário saber as forças que causam o movimento.

A posição de uma partícula é definida pelo seu vetor de posição, que pode ser decomposto em componentes ao longo do plano cartesiano  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Para especificar a posição de uma partícula são necessárias três coordenadas. No entanto, é possível conhecer a posição de determinados sistemas a partir de um número inferior de coordenadas. O número de graus de liberdade é a quantidade de variáveis independentes necessárias para conhecer a posição de um sistema.

Para definir completamente a posição de um corpo com  $S$  graus de liberdade, serão necessárias  $S$  variáveis independentes. Essas variáveis são conhecidas como coordenadas generalizadas. A escolha dessas coordenadas é livre, não existe uma única opção, o que permite que ao realizar o modelo, decida-se de

maneira a simplificar ao máximo os cálculos. A escolha dessas coordenadas é chamada de parametrização do sistema.

Na formulação do calculo lagrangeano, o sistema é caracterizado por uma determinada função que depende das coordenadas generalizadas (q), e das suas derivadas temporais ( $\dot{q}$ ) e também do tempo. A função designada como lagrangeano do sistema é dada por:

$$L = K - U \quad [1]$$

Onde K é a soma de todas as energias cinéticas e U a soma de todas as energias potenciais do sistema.

Utilizando o princípio de ação mínima, também conhecido como princípio de Hamilton, a evolução do sistema, ou seja, q(t), em dois instantes de tempo pode ser escrita como:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad [2]$$

Desenvolvendo a integral mostrada acima, é possível mostrar que a minimização da ação conduz a um conjunto de equações diferenciais que são conhecidas como equações de Lagrange, que podem ser descritas como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad [3]$$

Para  $i=1,2,\dots,s$ . O i representa as coordenadas generalizadas, ou seja, terá uma equação de Lagrange para cada coordenada generalizada do sistema. Essa equação também pode ser chamada de equações diferenciais do movimento.

## 2.4 Linearização

A linearização é utilizada para transformar um sistema não-linear em um sistema linear equivalente. Existem várias abordagens para solução deste problema.

### Série de Taylor

Para linearizar sistemas não lineares uma abordagem que pode ser utilizada é a expansão das funções em Séries de Taylor. Considerando uma função  $f(x)$ , e supondo  $\bar{x}$  é um ponto onde  $f(\bar{x})=0$ . Neste caso, o ponto  $\bar{x}$  é chamado o ponto de equilíbrio do sistema  $\dot{x} = f(x)$ , desde que  $\dot{x}=0$  quando  $x=\bar{x}$  (o sistema atingirá o equilíbrio em  $\bar{x}$ ). A expansão da série de Taylor de  $f(x)$  em torno do ponto  $\bar{x}$  é dada por:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}} (x-\bar{x}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=\bar{x}} (x-\bar{x})^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x=\bar{x}} (x-\bar{x})^3 + \dots \quad [4]$$

Que pode ser escrita como:

$$f(x) = \underbrace{f(\bar{x}) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}} (x-\bar{x})}_{a} + \dots \quad [5]$$

Para x suficientemente perto de  $\bar{x}$ , os termos maiores serão perto de zero, então eles podem ser desconsiderados para obter a aproximação:

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + a(x-\bar{x}) \quad [6]$$

Desde que  $f(\bar{x})=0$ , a equação diferencial não-linear pode ser aproximada perto do ponto de equilíbrio para:

$$\dot{x} = a(x - \bar{x}) \quad [7]$$

## 2.5 Modelagem e Controle por Realimentação de Estados

Até algum tempo atrás, existiam apenas algumas abordagens no estudo de sistemas de controle em que se utilizava a transformada de Laplace, para a obtenção da função de transferência de determinado sistema. Apenas com a função de transferência era feita toda a análise de controle sobre a planta.

Com a disponibilidade dos computadores digitais, passou a ser conveniente considerar a formulação no domínio do tempo de equações representando os sistemas de controle. As técnicas no domínio do tempo podem ser usadas para sistemas não-lineares, variantes no tempo e multivariáveis.

A análise e o projeto de sistemas de controle no domínio do tempo utilizam o conceito de estado de um sistema. “O estado de um sistema é um conjunto de variáveis, tal que o conhecimento dos valores destas variáveis e das funções de entrada, com as equações que descrevem a dinâmica, fornecem os estados futuros e saída futura do sistema” [Dorf].

O estado de um sistema é descrito por meio de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, escrito em termos das variáveis de estados. O sistema é geralmente representado através de uma notação compacta da equação diferencial de estado como

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad [8]$$

A equação acima é comumente chamada de equação de estado.

Em geral, as saídas de um sistema linear podem ser relacionadas com as variáveis de estado e com os sinais de entrada pela equação de saída

$$y = Cx + Du \quad [9]$$

Onde  $y$  é o conjunto dos sinais de saída expressos na forma de um vetor coluna.

O método no domínio do tempo, também pode ser utilizado para projetar estruturas de compensação adequadas para sistemas de controle. O interesse recai, fundamentalmente, em controlar o sistema com um sinal de controle,  $u(t)$ , que seja uma função das diversas variáveis de estado. Desenvolve-se então um controlador com variáveis de estado que opera sobre as informações disponíveis sob a forma medida. Este tipo de compensação é bastante útil para otimização de sistemas.

## 2.6 Controladores

As tarefas que eram realizadas manualmente agora estão sendo realizadas por processos automatizados. Para tanto, os sistemas de controle automático estão desempenhando um papel fundamental. Um sistema de controle é uma junção de componentes que controlam o sistema de forma a se ter a saída desejada. Um ponto fundamental no estudo de controle é a obtenção do modelo matemático que representa uma relação entre a entrada e a saída. Há dois tipos de modelo em sistema de controle, o sistema de malha aberta e o de malha fechada.

### Malha Aberta

Sistemas em malha aberta são aqueles em que a saída não tem efeito sobre a ação de controle, ou seja, o sistema não é realimentado, sendo assim, não há comparações entre entrada e saída, como está ilustrado na figura 3:

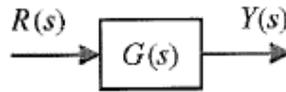


Figura 3 Malha Aberta

Entre as principais características deste tipo de controle pode-se citar:

- A saída é baseada em métodos heurísticos;
- Não reagirá a distúrbios;
- Mais simples de projetar

### Malha Fechada

Como a resposta desejada do sistema é conhecida, é gerado um sinal proporcional ao erro entre a resposta desejada e a resposta real. A utilização deste sinal para controlar o processo resulta em uma seqüência de operações a malha fechada que é chamada de sistema com retroação, como ilustra a figura 4:

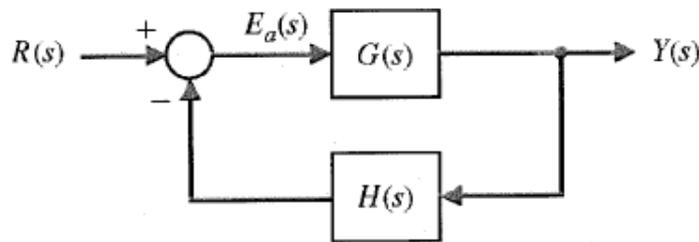


Figura 4 Malha Fechada

Entre as principais vantagens pode-se citar:

- Ajuste de desempenho em regime transitório e em regime estacionário.

### 2.6.1 Índices de Desempenho

Ao se analisar e projetar um sistema de controle deve-se definir uma medida para o seu desempenho. Assim, com base no desempenho desejado para o sistema de controle, podem-se ajustar os valores de parâmetros do sistema para que seja alcançada a resposta desejada. Como os sistemas de controle são inerentemente dinâmicos, seu desempenho é especificado, geralmente, em termos de ambas as respostas, transitória e estacionária. “A resposta em regime transitório é a parte da resposta que desaparece com o tempo. A resposta em regime estacionário é a parte da resposta que ocorre muito tempo depois da aplicação de um sinal de entrada” [7].

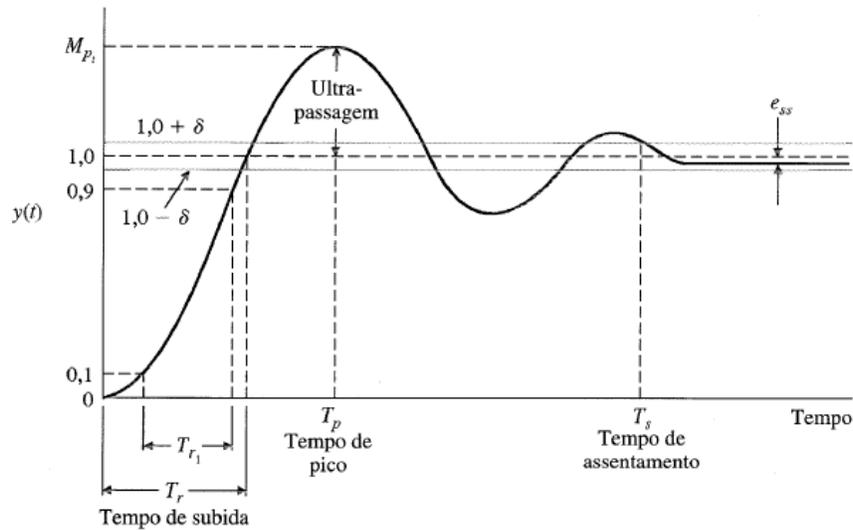
Considere-se um sistema de segunda ordem com uma única malha e determinar sua resposta a uma excitação em um degrau unitário. A saída a malha fechada, utilizando notação generalizada fica:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s) \quad [10]$$

Para uma entrada em degrau unitário, obtém-se:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad [11]$$

Medidas de desempenho padronizadas são definidas usualmente em termos da resposta do sistema ao degrau, como está mostrado na figura 5:



**Figura 5 Índices de Desempenho**

A rapidez da resposta é medida pelo tempo de subida,  $T_r$ , e pelo tempo de pico,  $T_p$ . A semelhança entre a resposta real e a entrada em degrau é medida pela ultrapassagem percentual (overshoot), U.P., e pelo tempo de assentamento,  $T_s$ . Abaixo segue as fórmulas mais utilizadas dos índices:

$$T_s = 4\tau = \frac{4}{\zeta\omega_n} T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{U.P.} = 100e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \quad [12]$$

### 2.6.2 Controle Proporcional

Para um controlador com ação de controle proporcional, a relação entre o sinal de saída do controlador  $u(t)$  e o sinal de erro atuante  $e(t)$  é

$$u(t) = K_p e(t) \quad [13]$$

Ou, no domínio da frequência,

$$\frac{U(S)}{E(S)} = K_p \quad [14]$$

Onde  $K_p$  é denominado ganho proporcional.

Qualquer que seja o mecanismo real ou a forma da energia usada na operação, o controlador proporcional é essencialmente um amplificador com ganho ajustável. Um diagrama em blocos que ilustra a ação desse controlador é mostrado na figura 6:

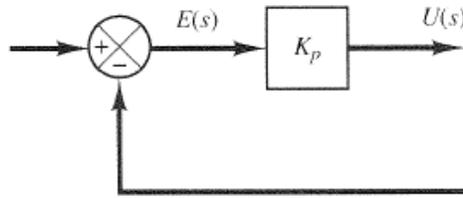


Figura6ControladorProporcional

**2.6.3 Controlador PD**

A ação de um controlador proporcional-e-derivativo é definida pela seguinte equação

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} \tag{15}$$

E a função de transferência é

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_d s \tag{16}$$

Onde  $K_p$  representa o ganho proporcional e  $K_d$  é o ganho derivativo. A realimentação derivativa é utilizada em conjunto com a realimentação proporcional para aumentar o amortecimento do sistema e melhorar sua estabilidade. Segue como exemplo o diagrama em blocos da figura 7:

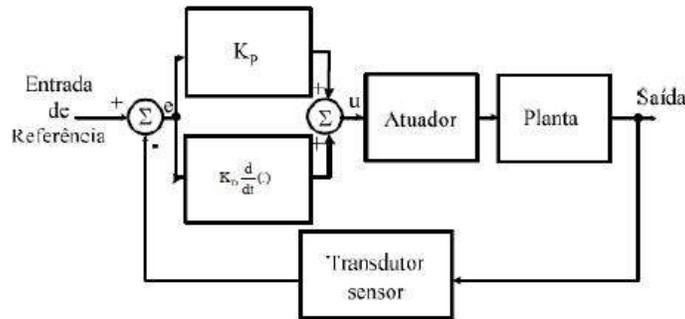


Figura 7 Controlador PD

A realimentação puramente derivativa não é prática do ponto de vista de implementação experimental, pois se o erro  $e(t)$  permanecesse constante, a saída do controlador derivativo seria zero e um termo proporcional seria necessário para fornecer um sinal de controle. No controle derivativo a correção depende da taxa de variação do erro.

**2.6.4 Controle Ótimo Quadrático**

Para abordar o problema do controle ótimo quadrático, são dadas as seguintes equações:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{17}$$

Determinar a matriz  $K$  do vetor de controle ótimo

$$u(t) = -Kx(t) \tag{18}$$

De modo a minimizar o índice de desempenho

$$J = \int_0^{\infty} (x * Qx + u * Ru)dt \quad [19]$$

Onde **Q** e **R** são matrizes hermitianas. Note-se que o segundo termo da equação acima exprime um gasto de energia. As matrizes **Q** e **R** determinam a importância relativa do erro e do dispêndio de energia.

A lei de controle linear dada pela equação [18] é a lei de controle ótima [17]. Em conseqüência, se os elementos da matriz **K** forem determinados de modo a minimizar o índice de desempenho, então a equação [18] é ótima qualquer que seja o estado inicial  $x(0)$ . O diagrama de blocos mostrando a configuração ótima aparece na figura 8:

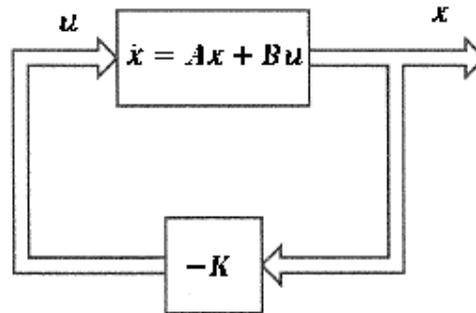


Figura 8 Controlador Ótimo

Uma vantagem em se utilizar o esquema de controle ótimo quadrático é que o sistema projetado será estável exceto no caso em que o sistema não seja controlável. No projeto de sistemas de controle baseados na minimização de índices quadráticos de desempenho há necessidade de se resolver as equações de Riccati. O MatLab possui um comando lqr que fornece a solução da equação de Riccati para sistemas contínuos no tempo e determina a matriz de ganho de retroação ótima.

### 3. METODOLOGIA

Como mencionado anteriormente, o esquema de controle consiste em duas malhas de controle e uma lógica de tomada de decisão entre as mesmas. Uma malha de controle é o controlador Proporcional-Velocidade (PV) no qual a posição do carrinho segue um setpoint desejado para jogar o pêndulo da posição invertida para posição vertical para o alto. A outra malha de controle é ativada quando o pêndulo está em volta da posição vertical para cima e consiste do Regulador Quadrático Linear (LQR) que mantém o pêndulo invertido na posição vertical.

#### 3.1 Especificações de Projeto do Controlador PV

1. O Percentual de Overshoot(PO) da posição do carrinho deve ser menos que 5%:  
 $PO \leq 5\%$
2. O tempo em que a posição do carrinho alcança o primeiro pico deve ser menor que 200 ms:  
 $t \leq 0.2$  [s]

#### 3.2 Especificações de Projeto do Controlador LQR

1. Regular o ângulo do pêndulo na posição vertical e nunca exceder  $\pm 1^\circ$  de deflexão:  
 $|\alpha| \leq 1^\circ$
2. Ter um tempo de acomodação,  $t_r$ , na resposta da posição do carrinho menor que 2 segundos:  
 $t_r \leq 2$  [s]

3. Minimizar o esforço de controle produzido, que é proporcional a tensão de entrada do motor  $V_m$ . O amplificador de potência não deve entrar na região de saturação.

Ressaltando que as duas saídas do sistema a serem controladas são:  $x_c$  e  $\alpha$ , respectivamente, posição do carrinho e ângulo do pêndulo em relação a posição de equilíbrio desejada.

### 3.3 Modelagem da Planta IP02 para o Controlador PV

No projeto aproximado do controlador PV, o pêndulo simples montado na frente do carrinho linear é ignorado e o sistema a ser considerado é apenas o servo da planta IP02 sozinho, como segue na figura 9:

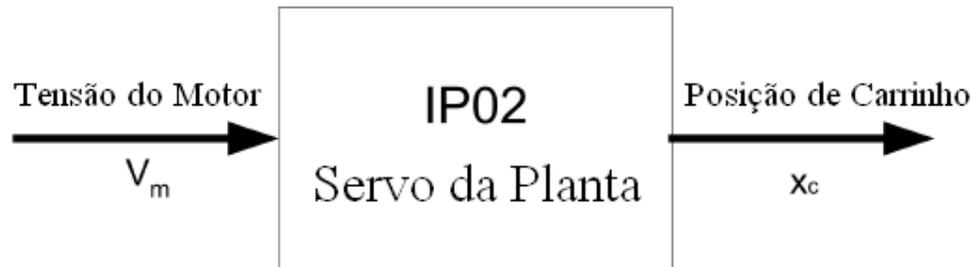


Figura 9 Servo da Planta IP02

Em outras palavras a função de transferência em malha aberta, chamada  $G(s)$ , pode ser escrita como:

$$G(s) = \frac{x(s)}{V_m(s)} \quad [20]$$

Esta seção apresenta a modelagem matemática da planta IP02, que é a sigla do kit utilizado como plataforma experimental. O resultado do modelo linear irá prover uma função de transferência que será usada no projeto do controlador apropriado.

A equação [20] define  $G(s)$ , a função de transferência em malha aberta para o sistema IP02.

Primeiramente devemos iniciar aplicando a segunda lei de movimento de Newton juntamente com o princípio de D'Alembert ao sistema IP02, levando em consideração a força inercial devido à rotação da armadura do motor, chegamos em:

$$M \left( \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + F_{ai}(t) = F_c(t) - B_{eq} \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) \quad [21]$$

A força inercial da armadura devido à rotação do motor pode ser expressa como função do torque inercial da armadura:

$$F_{ai} = \frac{\eta_g K_g T_{ai}}{r_{mp}} \quad [22]$$

Aplicando a segunda lei de movimento de Newton ao eixo do motor:

$$J_m \left( \frac{d^2}{dt^2} \theta_m(t) \right) = T_{ai}(t) \quad [23]$$

Além disso, a configuração mecânica das engrenagens-suporte do carrinho nos dá a seguinte relação:

$$\theta_m = \frac{K_g x}{r_{mp}} \quad [24]$$

Substituindo as equações [24] e [23] a equação [22] tem-se a seguinte expressão para a força inercial da armadura:

$$F_{ai} = \frac{\eta_g K_g^2 J_m \left( \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right)}{r_{mp}^2} \quad [25]$$

A força motriz,  $F_c$ , gerada pelo motor DC e a atuante no carrinho através das engrenagens pode ser expressa como:

$$F_c = \frac{\eta_g K_g T_m}{r_{mp}} \quad [26]$$

Mudando o foco agora para os componentes elétricos do motor DC, a figura 10 representa o esquemático elétrico clássico do circuito da armadura do motor DC padrão.

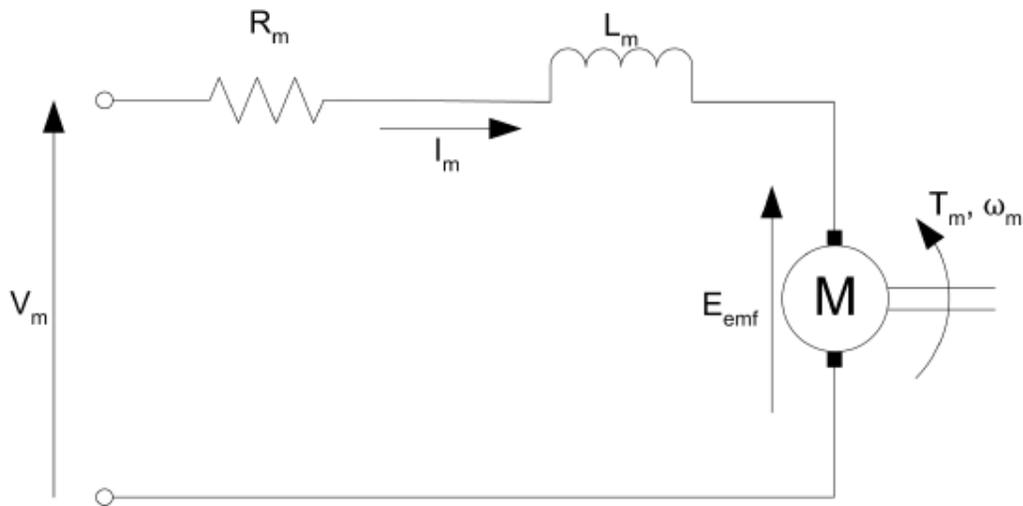


Figura 10 Esquema Elétrico do Motor DC

Usando a lei de Kirchhoff das tensões, obtém-se a seguinte equação:

$$V_m - R_m I_m - L_m \left( \frac{\partial}{\partial t} I_m \right) - E_{emf} = 0 \quad [27]$$

Contudo, desde que  $L_m \ll R_m$ , pode-se desprezar a indutância do motor, levando-nos a:

$$I_m = \frac{V_m - E_{emf}}{R_m} \quad [28]$$

Como se sabe a força contra-eletromotriz criada pelo motor,  $E_{emf}$ , é proporcional a velocidade do eixo do motor, então temos:

$$I_m = \frac{V_m - K_m \omega_m}{R_m} \quad [29]$$

Além disso, para dar conta das perdas elétricas do motor DC, a eficiência do motor é introduzida para calcular o torque gerado pelo motor DC:

$$T_m = \eta_m K_t I_m \quad [30]$$

Substituindo as equações [30] e [29] na equação [26] chegamos a:

$$F_c = \frac{\eta_g K_g \eta_m K_t (V_m - K_m \omega_m)}{R_m r_{mp}} \quad [31]$$

Considerando o suporte, as engrenagens e os mecanismos da caixa de velocidades, a velocidade angular do motor pode ser escrita como função da velocidade linear do carrinho, expressa por:

$$\omega_m = \frac{K_m \left( \frac{d}{dt} x(t) \right)}{r_{mp}} \quad [32]$$

Portanto substituindo a equação [32] na [31] e rearranjando temos:

$$F_c = \frac{\eta_g K_g \eta_m K_t \left( V_m r_{mp} - K_g K_m \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) \right)}{R_m r_{mp}^2} \quad [33]$$

Finalmente substituindo as equações [33] e [25] na equação [21] e aplicando a transformada de Laplace temos a função de transferência em malha aberta, como segue:

$$G(s) = \frac{r_{mp} \eta_g K_g \eta_m K_t}{\left( (R_m M r_{mp}^2 + R_m \eta_g K_g^2 J_m) s + \eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m + B_{eq} R_m r_{mp}^2 \right) s} \quad [34]$$

Usando os parâmetros do modelo, a função de transferência em malha aberta fica:

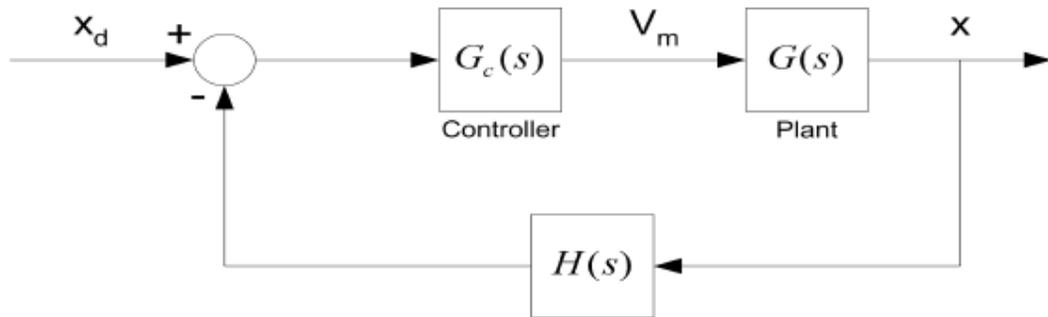
$$G(s) = \frac{2,46}{(s + 17,13)s} \quad [35]$$

### 3.4 Projeto do Controlador Proporcional-Velocidade (PV)

Nesta sessão será apresentado o projeto do controlador em malha fechada para controlar a posição do carrinho, de uma forma rápida e precisa.

#### Padrão de Sistemas em Malha Fechada

A figura 11 mostra o padrão da localização do controlador no sistema em malha fechada com realimentação unitária:



**Figura 11 Controlador em Malha Fechada**

Para o sistema em malha fechada representado na figura acima, a função de transferência em malha fechada,  $T(s)$ , é dada pela seguinte equação:

$$\frac{x(s)}{x_d(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)} \quad [36]$$

A equação [P16] expressa um modelo de planta que não tem zeros e 2 pólos. Além disso, para projetar um controlador que satisfaça as especificações, a teoria de controle fornece uma fórmula aproximada:

$$T(s) = \frac{K_{dc}\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta s + \omega_n^2} \quad [37]$$

Onde  $K_{dc}$  é o ganho Dc do sistema.

A equação característica da função de transferência em malha fechada expressa na forma padrão da equação acima é como segue:

$$s^2 + 2\zeta s + \omega_n^2 \quad [38]$$

### Controlador Proporcional Derivativo (PD)

De acordo com o senso clássico, um controlador Proporcional-Derivativo tem a seguinte função de transferência:

$$G_c(s) = K_p + K_d s \quad [39]$$

Como foi expresso na equação acima, colocar um controlador deste tipo no caminho direto poderia resultar em introduzir um zero na função de transferência em malha fechada. Como resultado da introdução desse zero, a função de transferência em malha fechada poderia não mais corresponder à forma da equação [37].

Com isso a próxima sessão apresenta um controlador que será utilizado, para encontrar as especificações do projeto, de forma mais analítica, ou seja, utilizando como referência a equação padrão [37].

### Controlador Proporcional Velocidade

Para trabalhar sem o zero “não desejado” introduzido pelo controlador PD, será apresentado o controlador Proporcional-Velocidade (PV). Tal controlador introduz dois termos corretivos: um é o proporcional ( $K_p$ ) para o erro da posição e o outro é o proporcional ( $K_v$ ) para a velocidade. Coincidentemente, a características das equações das funções de transferência dos controladores PV e PD são iguais.

A equação abaixo, expressa a lei de controle do PV, onde  $x_d$  é o sinal de referência.

$$V_m(t) = K_p(x_d(t) - x(t)) - K_v\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) \quad [40]$$

A figura 12 mostra o diagrama em blocos do esquema de controle do PV:

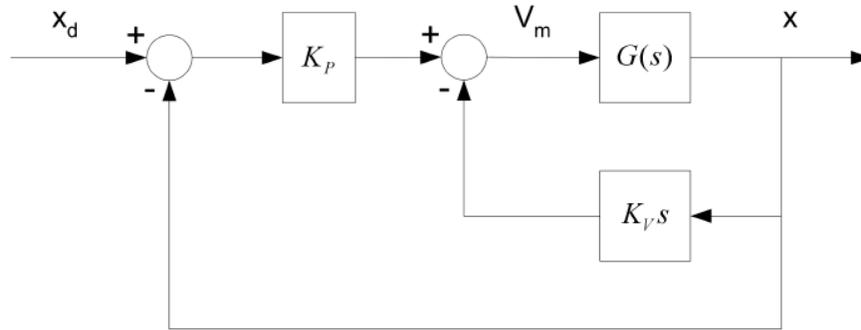


Figura 12 Controlador PV

Resolvendo o diagrama em blocos chega-se à seguinte função de transferência em malha fechada:

$$\frac{x(s)}{x_d(s)} = \frac{K_p G(s)}{1 + K_p G(s) + G(s)K_v s} \quad [41]$$

Feito isso, é possível chegar aos parâmetros de especificação do projeto,  $\omega_n$  e  $\zeta$ :

$$\omega_n = \frac{\sqrt{R_m(Mr_{mp}^2 + \eta_g K_g^2 J_m)r_{mp}\eta_g K_g \eta_m K_t K_p}}{R_m M r_{mp}^2 + R_m \eta_g K_g^2 J_m} \quad [42]$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{r_{mp}\eta_g K_g \eta_m K_t K_p + \eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m + B_{eq} R_m r_{mp}^2}{\sqrt{R_m(Mr_{mp}^2 + \eta_g K_g^2 J_m)r_{mp}\eta_g K_g \eta_m K_t K_p}} \quad [43]$$

Também se podem colocar os dois ganhos do controlador como função dos parâmetros da equação característica de segunda ordem  $\omega_n$  e  $\zeta$ .

$$K_p = \frac{\omega_n^2 R_m (M r_{mp}^2 + \eta_g K_g^2 J_m)}{r_{mp} \eta_g K_g \eta_m K_t} \quad [44]$$

$$K_v = \frac{2\zeta \omega_n R_m M r_{mp}^2 + 2\zeta \omega_n R_m \eta_g K_g^2 J_m - \eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m - B_{eq} R_m r_{mp}^2}{r_{mp} \eta_g K_g \eta_m K_t} \quad [45]$$

Utilizando as especificações do projeto assumimos  $\omega_n = 26 \frac{rad}{s}$  e  $\zeta = 0,59$ . Com isso podemos finalmente chegar aos ganhos do controlador:

$$K_p = 210.6582 \frac{V}{m} K_v = 9.1313 \frac{V \cdot s}{m} [46]$$

### 3.5 Modelagem da Planta para o Controlador LQR

Um esquema do pêndulo invertido simples sobre carrinho está representado na figura 13. Como está ilustrado na figura abaixo o sentido positivo de rotação adotado é o anti-horário quando se olha para o carrinho. Também, o ângulo zero, o módulo de  $2\pi$ , corresponde à posição perfeitamente vertical do pêndulo invertido e apontando para cima. Além disso, a direção positiva do deslocamento linear é a da direita quando se olha para o carrinho.

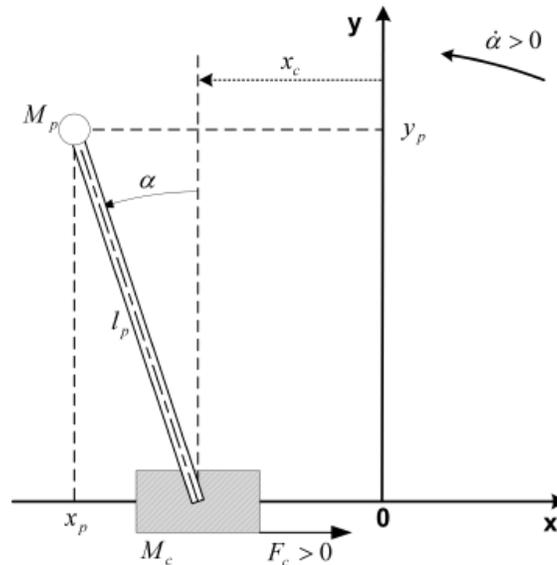


Figura 13 Esquema de Modelagem

#### Equações Não-Lineares de Movimento

Nessa seção encontram-se as equações não-lineares de movimento do Pêndulo Invertido Simples montado sobre carrinho. O método de Lagrange é usado para obter o modelo dinâmico do sistema. Nesse caso, como o sistema tem dois graus de liberdade, há duas coordenadas Lagrangianas:  $x_c$  e  $\alpha$ . Também, uma simples entrada para o sistema é considerada,  $F_c$ .

Para cumprir a abordagem de Lagrange, o Lagrangiano do sistema precisa ser determinado. Isso é feito através do cálculo das energias potencial e cinética total.

De acordo com a estrutura definida pela figura 13, a coordenadas cartesianas absolutas do centro de gravidade do pêndulo são caracterizadas por:

$$x_p = x_c(t) - l_p \sin(\alpha(t)) \quad e \quad y_p(t) = l_p \cos(\alpha(t)) \quad [47]$$

Calculemos primeiramente a energia potencial total  $V_T$ , que é totalmente expressa pela energia potencial gravitacional do pêndulo:

$$V_T = M_p g l_p \cos(\alpha(t)) \quad [48]$$

Agora determinemos a energia cinética total  $T_T$ , ou seja, a junção das energias cinéticas totais devido ao movimento translacional e rotacional do sistema, devidas ao carrinho e ao pêndulo invertido.

Primeiro, a energia cinética translacional do carrinho motorizado,  $T_{ct}$ , é expressa como segue:

$$T_{ct} = \frac{1}{2} M \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right)^2 \quad [49]$$

Em seguida, a energia cinética rotacional devido ao motor DC do carrinho,  $T_{cr}$ , pode ser caracterizada por:

$$T_{cr} = \frac{1}{2} \frac{J_m K_g^2 \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right)^2}{r_{mp}^2} \quad [50]$$

Portanto, como resultado das equações [49] e [50],  $T_c$ , a energia cinética total do carrinho, pode ser escrita como segue:

$$T_c = \frac{1}{2} M_c \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right)^2 \quad \text{onde} \quad M_c = M + \frac{J_m K_g^2}{r_{mp}^2} \quad [51]$$

Assumindo que a massa do pêndulo invertido está concentrada no seu centro de gravidade, a energia cinética translacional do pêndulo,  $T_{pt}$ , pode ser expressa como função da velocidade linear do centro de gravidade:

$$T_{pt} = \frac{1}{2} M_p \sqrt{\left( \frac{d}{dt} x_p(t) \right)^2 + \left( \frac{d}{dt} y_p(t) \right)^2} \quad [52]$$

Onde, a coordenada  $x$  da velocidade linear do centro de gravidade do pêndulo é determinado por:

$$\frac{d}{dt} x_p(t) = \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right) - l_p \cos(\alpha(t)) \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right) \quad [53]$$

E a coordenada  $y$  da velocidade linear do centro de gravidade do pêndulo é determinado por:

$$\frac{d}{dt} y_p(t) = -l_p \sin(\alpha(t)) \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right) \quad [54]$$

Adicionalmente, a energia cinética rotacional do pêndulo,  $T_{pr}$ , pode ser caracterizada por:

$$T_{pr} = \frac{1}{2} I_p \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right)^2 \quad [55]$$

Portanto, a energia cinética total do sistema é a soma de quatro energias cinéticas individuais, previamente caracterizadas pelas equações [L3] a [L7]. Expandindo, colecionando termos e rearranjando, a energia cinética total do sistema,  $T_T$  é:

$$T_T = \frac{1}{2} (M_c + M_p) \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right)^2 - M_p l_p \cos(\alpha(t)) \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right) \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right) \quad [56]$$

Consideremos agora as equações de Lagrange para o sistema. Por definição, as duas equações de Lagrange, resultantes das previamente definidas duas coordenadas,  $x_c$  e  $\alpha$ , têm a seguinte formulação formal:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \frac{d}{dt} x_c(t)} L \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x_c} L \right) = Q_{x_c} \quad [57]$$

e

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \frac{d}{dt} \alpha(t)} L \right) - \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} L \right) = Q_{\alpha} \quad [58]$$

Nas duas equações acima,  $L$  é chamado de Lagrangiano e é definido por:

$$L = T_T - V_T \quad [59]$$

$Q_{x_c}$  é a força generalizada aplicada na coordenada generalizada  $x_c$ . Da mesma forma,  $Q_{\alpha}$  é a força generalizada aplicada na coordenada generalizada  $\alpha$ . Nosso sistema de forças pode ser definido como segue:

$$Q_{x_c}(t) = F_c(t) - B_{eq} \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right) \quad e \quad Q_{\alpha}(t) = -B_p \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right) \quad [60]$$

Deve ser notado que o atrito de Coulomb aplicado no carrinho foi negligenciado. Além disso, a força no carrinho devido ação do pêndulo também foi desconsiderada na presente modelagem.

Calculando o resultado da equação [L9] em uma expressão mais explícita para a primeira equação de Lagrange:

$$\begin{aligned} (M_c + M_p) \left( \frac{d^2}{dt^2} x_c(t) \right) - M_p l_p \cos(\alpha(t)) \left( \frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) \right) + M_p l_p \sin(\alpha(t)) \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right)^2 = \\ F_c - B_{eq} \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right) \end{aligned} \quad [61]$$

Da mesma forma, calculando o resultado da equação [L10]:

$$\begin{aligned} -M_p l_p \cos(\alpha(t)) \left( \frac{d^2}{dt^2} x_c(t) \right) + (I_p + M_p l_p^2) \left( \frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) \right) - M_p g l_p \sin(\alpha(t)) = \\ -B_p \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right) \end{aligned} \quad [62]$$

Finalmente, resolvendo as duas equações Lagrangianas mostradas acima, para a derivada segunda das duas coordenadas Lagrangianas, resulta no seguinte conjunto de equações não-lineares:

$$\frac{d^2}{dt^2} x_c(t) = \left( - (I_p + M_p l_p^2) B_{eq} \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right) - (M_p^2 l_p^3 + I_p M_p l_p) \sin(\alpha(t)) \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right)^2 - M_p l_p \cos(\alpha(t)) B_p \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right) + (I_p + M_p l_p^2) F_c + M_p^2 l_p^2 g \cos(\alpha(t)) \sin(\alpha(t)) \right) / ((M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2 + M_p^2 l_p^2 \sin^2(\alpha(t))) \quad [63]$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) = \left( (M_c + M_p) M_p g l_p \sin(\alpha(t)) - (M_c + M_p) B_p \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right) - M_p^2 l_p^2 \sin(\alpha(t)) \cos(\alpha(t)) \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right)^2 - M_p l_p \cos(\alpha(t)) B_{eq} \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right) \right) \quad [64]$$

### Linearização e Representação em Variáveis de Estado

Em casos como esse, em que o pêndulo deve ser mantido na posição vertical para cima, a linearização pode ser feita em torno do ângulo zero, para pequenas amplitudes de oscilação.

Para pequenos ângulos  $\alpha$ , pode-se usar a série de expansão de segunda ordem, como segue:

$$\cos(\alpha) = 1 + O(\alpha^2)$$

e

$$\sin(\alpha) = \alpha + O(\alpha^2)$$

Logo utilizando esse artifício chega-se às seguintes equações:

$$\frac{d^2}{dt^2} x_c(t) = \frac{- (M_p l_p^2 + I_p) B_{eq} \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right) - M_p l_p B_p \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right) + (M_p l_p^2 + I_p) F_c + M_p^2 l_p^2 g \alpha(t)}{(M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2} \quad [65]$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) =$$

$$\frac{(M_c + M_p) M_p g l_p \alpha(t) - (M_c + M_p) B_p \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right) - M_p l_p B_{eq} \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right) + F_c M_p l_p}{(M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2}$$

[66]

Partindo das equações linearizadas pode chegar à seguinte representação em variáveis de estado:

$$\frac{\partial}{\partial t} X = A X + B U$$

Onde X é o vetor de estados. Na prática X é freqüentemente escolhido para incluir as coordenadas generalizadas bem como suas derivadas de primeira ordem. No nosso caso, X é definido tal como sua transposta, como segue:

$$X^T = \left[ x_c(t), \alpha(t), \frac{d}{dt} x_c(t), \frac{d}{dt} \alpha(t) \right]$$

E as variáveis A e B:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{g M_p^2 l_p^2}{(M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2} & - \frac{B_{eq} (M_p l_p^2 + I_p)}{(M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2} & - \frac{M_p l_p B_p}{(M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2} \\ 0 & \frac{M_p g l_p (M_c + M_p)}{(M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2} & - \frac{M_p l_p B_{eq}}{(M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2} & - \frac{(M_c + M_p) B_p}{(M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{I_p + M_p l_p^2}{(M_c + M_p) I_p + M_p l_p^2 M_c} \\ \frac{M_p l_p}{(M_c + M_p) I_p + M_p l_p^2 M_c} \end{bmatrix}$$

Mas se  $I_p$ ,  $B_p$  e  $B_{eq}$  são desconsiderados, as duas variáveis de estado A e B tomam a básica e bem conhecida forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{M_p g}{M_c} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(M_c + M_p) g}{M_c l_p} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_c} \\ \frac{1}{M_c l_p} \end{bmatrix}$$

Para facilitar a análise, o ideal é que a entrada no sistema seja a tensão DC aplicada no motor do carrinho, para tanto será utilizada a seguinte relação de conversão da força  $F_c$  para a tensão  $V_m$ :

$$F_c = - \frac{\eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right)}{R_m r_{mp}^2} + \frac{\eta_g K_g \eta_m K_t V_m}{R_m r_{mp}}$$

Com isso, e aplicando os parâmetros do sistema, chega-se às seguintes equações de estado:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.87 & -4.9 & -0.0094 \\ 0 & 46.25 & -21.21 & -0.5 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.9 \\ 3.93 \end{bmatrix}$$

Como a matriz A do espaço de estados do sistema é 4x4, deve haver quatro pólos em malha aberta. Calculando os quatro autovalores de A, resultam os seguintes pólos em malha aberta:

$$-16,2577; -4,5611; 0; 4,8426$$

Pode ser claramente percebido que o sistema em malha aberta tem um pólo no semi-eixo direito, ou seja, um pólo positivo. Portanto o sistema é instável. Como consequência para manter o pêndulo equilibrado no alto, deve projetar um controlador de sorte que os pólos em malha fechada estejam todo no semi-eixo esquerdo.

### 3.6 Controlador LQR

Alguns testes foram realizados, para a sintonia dos parâmetros das matrizes Q e R: Modificando os elementos da matriz Q mudam-se os ganhos ou pesos para cada erro de cada estado e alterando o elemento de R se pode mudar o a energia gasta no esforço de controle solicitado pelo sistema.

Nos teste percebeu-se o seguinte:

- Aumentando o valor do ganho do erro da posição do carro  $Q(1,1)$ , sua importância relativa na função de custo, do erro de posição do carrinho é aumentada e, portanto tende a ser minimizada mais efetivamente pelo LQR. Isto pode resultar, dependendo dos outros pesos, em um melhor encaminhamento para a posição desejada do carrinho.
- Aumentando o peso relativo ao ganho do erro do ângulo do pêndulo  $Q(2,2)$ , sua importância relativa na função de custo, do erro do ângulo do pêndulo é aumentada e, portanto tende a ser minimizada mais

efetivamente pelo LQR. Isso pode resultar dependendo dos outros pesos, em uma melhor regulação em torno de zero (posição ereta) do ângulo do pêndulo. Além disso,  $Q(2,2)$  deve ter o “maior peso”, pois o primeiro objetivo é manter o pêndulo equilibrado na posição invertida.

- Aumentando o peso relativo ao fator de esforço de controle  $R(1,1)$ , o custo de aplicação da entrada aumenta. Portanto, o esforço de controle resultante gasto será reduzido. Por exemplo, se a tensão de entrada do motor entrar em saturação,  $R(1,1)$  precisa ser aumentado e/ou  $Q(1,1)$  e/ou  $Q(2,2)$  reduzido de sorte que a magnitude da entrada diminua.

Ou seja, é razoável ter-se  $Q(2,2)$  com um valor maior que  $Q(1,1)$  já que o principal objetivo do projeto é manter o pêndulo equilibrado na posição invertida. Com isso chegou-se ao seguinte resultado:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = 0.0004$$

Utilizando o seguinte comando do software MatLab foi possível calcular a matriz de retroação:

```
>>K = lqr(A, B, diag([ Q(1,1), Q(2,2), Q(3,3), Q(4,4) ]), R(1,1))
```

Com isso chegou-se ao seguinte resultado da matriz de retroação K:

```
K = [-50.00, 166.93, -48.72, 16.32]
```

#### 4. RESULTADOS

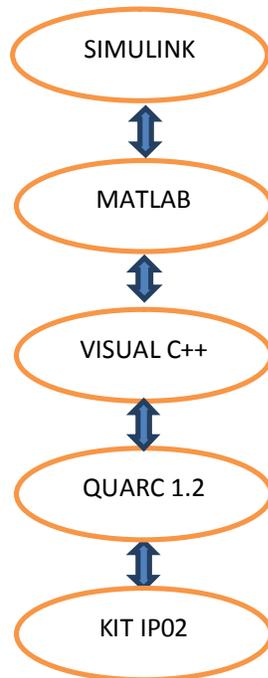
Para avaliar o desempenho do controle do ângulo do pêndulo e da posição do carrinho, foi utilizado um modelo do MatLab/Simulink em que toda a modelagem, tanto do controlador PV quanto do controlador LQR, foram transformadas em diagramas em blocos. A lógica de controle chaveada também foi traduzida em uma chave e suas condições de chaveamento foram definidas como dito anteriormente.

Segue abaixo uma relação do hardware e software utilizados nos experimentos:

- PC Intel Core 2 Quad CPU Q8400 @ 2.66GHz, 2 Gb de RAM;
- MatLab/Simulink versão 2008b;
- Quarc 1.2;
- Visual C++ 2008;
- Placa Terminal Q4;
- Placa de Aquisição de Dados conectada diretamente no barramento PCI da placa-mãe;
- Fonte de Alimentação Universal da Quanser
- Kit IP02 que consiste no carrinho, no pêndulo e na estrutura de deslizamento do carrinho.

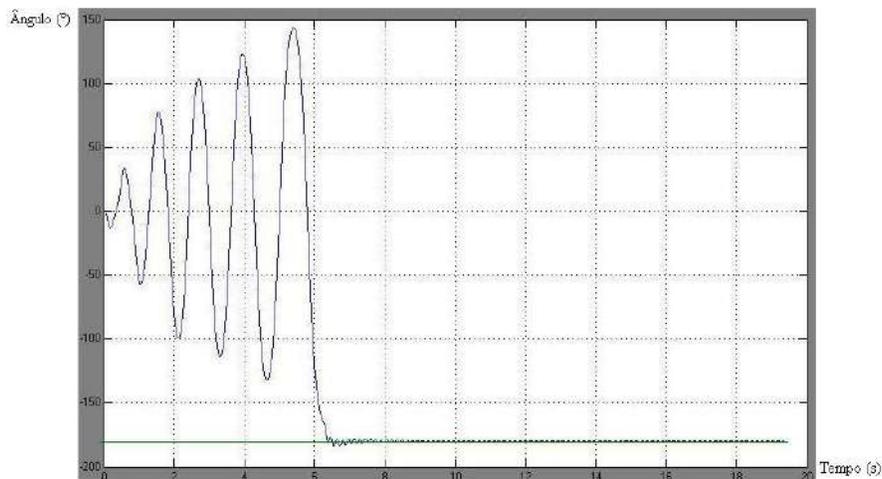
Há uma documentação disponibilizada pela Quanser [18] e [19] para o auxílio na utilização tanto do hardware quanto do software, ou seja, aborda-se desde a montagem do kit, passando pela metodologia de controle, até a configuração do conjunto de softwares para possibilitar sua integração e utilização conjunta.

A figura 14 ilustra o funcionamento do sistema utilizado. Utiliza-se as variáveis geradas pelo script do MatLab nos diagramas em bloco do Simulink, então constrói-se um projeto onde o Visual C++ atua na geração automática de código na linguagem C, posteriormente este código é compilado e executado através do software Quarc 1.2, que tem comunicação direta com a planta por meio da Placa de Aquisição de Dados conectada diretamente no barramento PCI da placa-mãe.

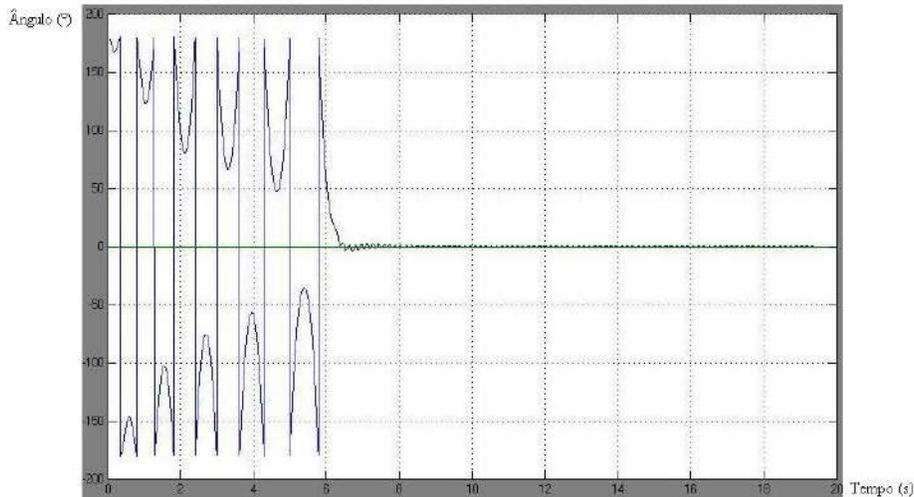


**Figura 14 Esquema Ilustrativo do Funcionamento do Sistema**

A figura 15 mostra a variação do ângulo do pêndulo, tendo como referência sua posição de repouso relaxado, ou seja, pendendo. A reta verde indica a posição desejada, após a estabilização do pêndulo na posição controlada. Com isso percebe-se que o controle foi alcançado satisfatoriamente, pois o pêndulo alcança  $-180^\circ$  em cerca de 7 segundos.

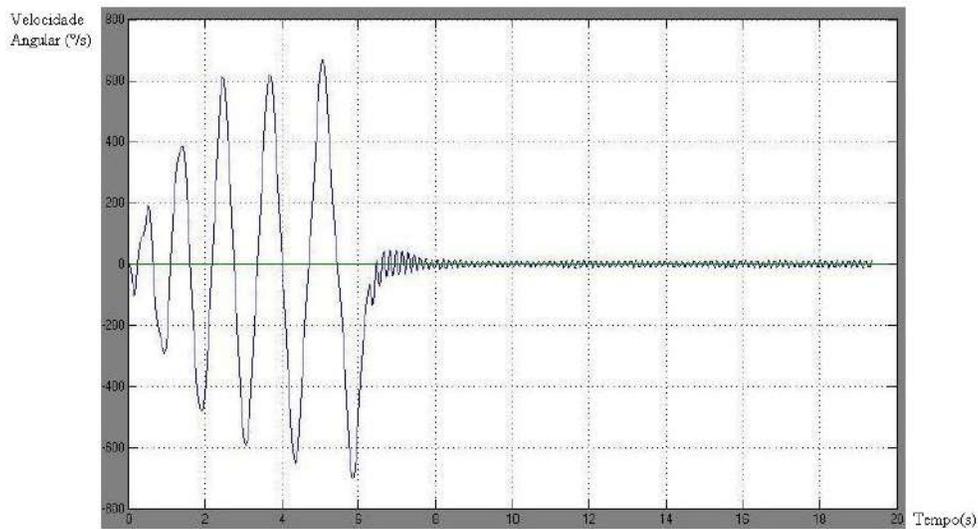


**Figura 15 Ângulo do Pêndulo tendo como referência a posição de descanso**



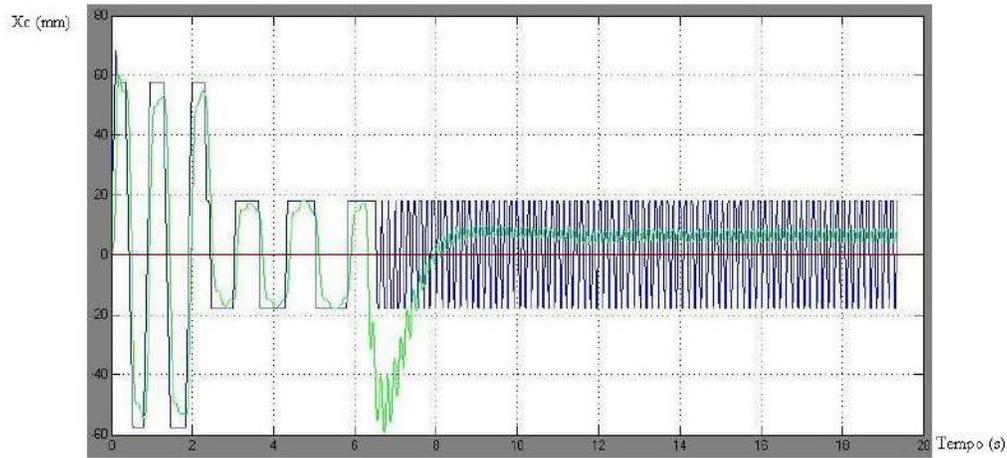
**Figura 16 Ângulo do Pêndulo tendo como referência a posição desejada**

A figura 16 mostra novamente o ângulo do pêndulo (em graus) visto de outra forma, agora tendo como referência a posição de equilíbrio desejada, ou seja, sua posição vertical, sentido para cima. A reta verde indica o ângulo que o pêndulo deve fazer com a referência após o controle, ou seja, ângulo  $0^\circ$ . Nota-se que o controle foi alcançado, pois o pêndulo sai de sua posição de repouso pendente, e após ser lançado para cima, é estabilizado na posição desejada em cerca de 7 segundos.



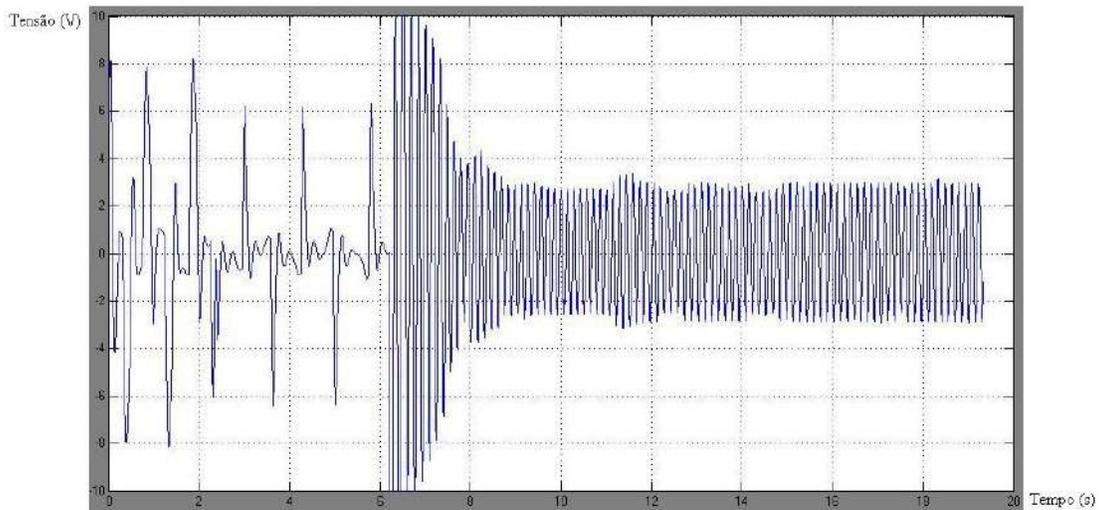
**Figura 17 Velocidade Angular da Haste do Pêndulo**

A figura 17 mostra a velocidade angular da haste do pêndulo (em graus por segundos). A reta verde indica o valor desejado da velocidade angular do pêndulo, ou seja, nas redondezas de zero. Nela se pode ver que a derivada do ângulo que o pêndulo faz com a vertical, passa a ter valores muito próximos de zero a partir dos 8 segundos.



**Figura 18 Posição do Carrinho**

A figura 18 mostra a posição do carrinho(em milímetros), a linha azul é o sinal que o controlador PV está gerando, e a linha verde é a posição medida pelo encoder de posição de carrinho. A reta em vermelho é o valor de posição desejada para o carrinho após a realização do controle do pêndulo. Nota-se que depois dos 8 segundos o carrinho permanece em cerca de 10 milímetros da posição desejada. A presença do erro em estado estacionário da posição atual do carrinho pode ser explicada pelas não-linearidades do sistema que não foram levadas em conta na modelagem, bem como as imprecisões nos parâmetro do modelo.



**Figura 19 Tensão do Motor DC**

A figura 19 mostra a tensão fornecida ao motor DC (em volts) que movimenta o carrinho. Podemos separar a figura acima em duas partes. A parte que vai de 0 a 6 segundos é aquela em que o motor está realizando um esforço para realizar o swing-up do pêndulo. A parte após os 6 primeiros segundos corresponde ao esforço do motor para realizar o balanço da haste do pêndulo.

## 5. CONCLUSÃO

Os resultados obtidos neste estudo indicam o potencial da utilização do sistema proposto na implementação de experiências práticas em sistemas de controle de processos inerentemente instáveis, não triviais e com certo grau de complexidade.

Além de permitir experiências práticas com um sistema real de pêndulo invertido, o kit utilizado apresenta-se como uma plataforma de desenvolvimento adequada para se testar diversas estratégias de controle.

Os resultados apresentados na seção 4 mostram que o projeto e a implementação deste trabalho foram realizados com sucesso. O pêndulo realizou o swing-up da posição relaxada de acordo com o algoritmo de controle desenvolvido e permaneceu estabilizado na posição desejada, muita embora esta seja uma região de instabilidade.

O carrinho apresentou um pequeno erro no seu controle de posição, porém a isso se pode atribuir as não-lineares e algumas características da planta que não foram levadas em consideração, para possibilitar o projeto de um controlador mais simples para o swing-up, tomando como foco assim, o balanço da haste do pêndulo.

Nota-se que na realidade o pêndulo apresenta um comportamento de estabilidade marginal, fenômeno conhecido como chattering, que aparece devido a propriedades como o atrito de Coulomb, folgas nas engrenagens do sistema, zona morta e histerese magnética do motor e outras imperfeições mecânicas.

Algumas dificuldades com respeito à plataforma foram encontradas, devido à incompatibilidade de softwares, sendo necessária a utilização de versões de softwares específicas.

Como trabalhos futuros, propõe-se projetar um controlador nebuloso para atuar tanto no swing-up quanto no balanço do pêndulo, pode-se utilizar também redes neurais, utilizando o modelo desenvolvido neste trabalho como referência para o treinamento da rede neural. Outra possibilidade é utilizar tanto lógica nebulosa quanto redes neurais, combinados, dessa forma será possível incluir as não-linearidades na modelagem da planta, obtendo resultados mais satisfatórios.

## 6. REFERÊNCIAS

- [1] Altendorfer, R.; Saranali, U.; Kumsuoglu H.; Koditscheck D.; Buerhler, M., Moore, N., McMordie, D., Brown Jr, H.B., Full, R.; Evidence for Spring Loaded Inverted Pendulum Running in a Hexapod Robot; Experimental Robotics VIII, p. 291-302, 2001
- [2] Abelson, C.F.; The Effect of Friction on Stabilizing of an Inverted Pendulum; Master's Thesis ISRN LUTFD2/TFRT—5563—SE; Department of Automatic Control; Lund University, Sweden; September 1996.
- [3] Aström, K. J., Furuta K.; Swing-up a Pendulum by Energy Control; 13<sup>th</sup> IFAC World Congress, San-Francisco-CA, 1996 and also in Automatica 36, pages 287-295, 2000
- [4] Borg, F.G; An Inverted Pendulum with Springly Control As A Model of Human Standing; Cornell University, 2005
- [5] Bugeja, M. (Faculty of Enginering University of Malta); Non-linear Swing-up and Stabilizing Control of a Inverted Pendulum System; EUROCOM 2003, Slovenia
- [6] Craig, K.; Awtar, S.; Inverted Pendulum Systems: Rotary and Arm-Driven a Mechatronic System Design Case Study; Department of Mechanical Engineering, Aeronautics Engineeringand Mechanics Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, USA;
- [7] Dorf, R. C.; Bishop, R. H.; Sistemas de Controle Modernos; 8ª Edição; LTC; Rio de Janeiro, 1998
- [8] Grasser, F.; D'Arrigo, A.; Colombi, S.; Rufer, A.C.; JOE, A Mobile Inverted Pendulum; IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol 49, No. 1, February 2002
- [9] Guangyu, L.; Dragan, N.; Mareels, I.; Modeling and Stabilization of a Spherical Inverted Pendulum; Department of Electrical and Electronic Engineering, The University of Melborn,Victoria, Austrália; 2005
- [10] Hurst, J.W. ; The role of compliance in Legged Locomotion; Thesis Proposal; Carnegie Mellon Univerity, September, 2005
- [11] Iida, F.; Chandana, P.; Dravid, R.; Design and Control of a Pendulum Driven Hopping Robot; Artificial Intelligence Laboratory, University of Zurich, Switzerland,2004

[12] Lakie, M.; Caplan, N.; Loram, I.D.; Human balancing of an inverted pendulum with a compliant linkage: neural control by anticipatory intermittent bias; ThePhysiological Society,pp. 357-370, 2003

[13] Landry, M.; Campbell, S.A.; Morris, K.; Aguilar, C.O.; Dynamics of an Inverted Pendulum with Delayed Feedback Control; Society for Industrial and AppliedMathmatics,Applied Dynamical Systems, Vol. 4, No. 2, pp. 333-351; 2005

[14] Lundberg, K. H.; Roberge, J.K.; Classical Dual-Inverted-Pendulum Control; 2003 IEEEConference on Decision and Control

[15] Nair, S.; Leonard, N.E.;A Normal Form For Energy Shaping: Application to the Furuta Pendulum; Procedures for 41 IEEE Conference on Decision and Control; 2002

[16] Kuo, B.C.; Sistemas de Controle Automático; 4ª Edição; Prentice/Hall do Brasil; Rio de Janeiro, 1985

[17] Ogata, K; Modern Control Engineering; 3rd; Prentice-Hall; New Jersey-USA; 1997

[18] Quanser; Self Erecting Single Inverted Pendulum: User Manual.

[19] Quanser; Self Erecting Single Inverted Pendulum: Linear Experiment #6: PV and LQR Control. Student Handout.

**ANEXO**

Para efetuar a modelagem do sistema foram utilizadas algumas constantes do kit, como massa do pêndulo, momento de inércia do pêndulo, coeficiente de atrito viscoso e constante gravitacional, que são detalhadas a seguir:

<i>Symbol</i>	<i>Description</i>	<i>Value</i>	<i>Unit</i>
$M_{pt}$	Long Pendulum Mass (with T-fitting)	0.230	kg
$M_{pm}$	Medium Pendulum Mass (with T-fitting)	0.127	kg
$L_{pt}$	Long Pendulum Full Length (from Pivot to Tip)	0.6413	m
$L_{pm}$	Medium Pendulum Full Length (from Pivot to Tip)	0.3365	m
$l_{pt}$	Long Pendulum Length from Pivot to Center Of Gravity	0.3302	m
$l_{pm}$	Medium Pendulum Length from Pivot to Center Of Gravity	0.1778	m
$I_{pt}$	Long Pendulum Moment of Inertia, about its Center Of Gravity	7.88E-003	kg.m <sup>2</sup>
$I_{pm}$	Medium Pendulum Moment of Inertia, about its Center Of Gravity	1.20E-003	kg.m <sup>2</sup>
$B_p$	Viscous Damping Coefficient, as seen at the Pendulum Axis	0.0024	N.m.s/rad
$g$	Gravitational Constant on Earth	9.81	m/s <sup>2</sup>

## Índice de Ilustrações

Figura 1 SLIP .....	3
Figura 2 Kit IP02.....	4
Figura 3 Malha Aberta.....	7
Figura 4 Malha Fechada.....	7
Figura 5 Índices de Desempenho.....	8
Figura 6 Controlador Proporcional.....	9
Figura 7 Controlador PD.....	9
Figura 8 Controlador Ótimo.....	10
Figura 9 Servo da Planta IP02.....	11
Figura 10 Esquema Elétrico do Motor DC.....	12
Figura 11 Controlador em Malha Fechada.....	14
Figura 12 Controlador PV.....	15
Figura 13 Esquema de Modelagem .....	16
Figura 14 Esquema Ilustrativo do Funcionamento do Sistema .....	23
Figura 15 Ângulo do Pêndulo tendo como referência a posição de descanso.....	23
Figura 16 Ângulo do Pêndulo tendo como referência a posição desejada .....	24
Figura 17 Velocidade Angular da Haste do Pêndulo.....	24
Figura 18 Posição do Carrinho.....	25
Figura 19 Tensão do Motor DC.....	25

## Lista de Abreviaturas

$V_m$	Tensão de Armadura do Motor
$I_m$	Corrente de Armadura do Motor
$R_m$	Resistência de Armadura do Motor
$K_t$	Constante de Torque do Motor
$\eta_m$	Rendimento do Motor
$K_m$	Constante da Força Contra Eletromotriz
$E_{emf}$	Tensão devida Força Contra Eletromotriz
$J_m$	Momento de inércia do Rotor
$K_g$	Relação das Engrenagens da Caixa de Velocidade
$\eta_g$	Rendimento da Caixa de Velocidade
$M_{c2}$	Massa do Carrinho (Carrinho apenas)
$M_w$	Massa do Peso do Carrinho
$M$	Massa do Carrinho, incluindo o peso extra
$B_{eq}$	Coefficiente de Amortecimento Viscoso
$F_c$	Força produzida pelo Motor
$x_c$	Posição Linear do Carrinho